

1) Ф-ия распр. функ. вынуждены

$$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi \in (-\infty, x]); \text{ функ. на } (\Omega, \mathcal{A}, P)$$

Основные св-ва:

$$1) 0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) F_{\xi}(x) \text{ монотонно убыв}$$

$$3) F_{\xi}(x) \text{ непрерывна}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$$

Виды: а) абс. непр. распр.: $\exists$ и почти всюду:

$$f_{\xi}(u) \geq 0 - \text{плотность: } F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(u) du$$

б) дискретн. распр.: имеет не более, чем счетное число точек роста

в) сингулярное распр.: непр., мера точек роста = 0

2) Уст-ые распр. теор. Левос

Опр. Ф. распр. $G(x)$ и соответ. характерист.

Ф-ия $g(t)$ наз-ия уст-ой, если $\forall a_1 > 0, a_2 > 0$

$\exists a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что: $g(a_1 t) \cdot g(a_2 t) = e^{ibt} g(at)$

$\forall a_1, a_2 > 0 \quad \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R} \quad \exists a > 0, b \in \mathbb{R}$ такие, что

Свертка $G_1 * G_2(x) = G_3(x)$, где $G_1 = G(a_1 x + b_1)$
 $G_2 = G(a_2 x + b_2)$
 $G_3 = G(ax + b)$

Все уст-ые распр. абсолютно непрерывны

теорема (Левис)

$\exists x_1, x_2, \dots$ - носов $S_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - a_n}{b_n}$ при

нек-ой выборке $\{a_n\} \in \mathbb{R}, \{b_n\} \in \mathbb{R}^+$ $G(x)$ -ф.р. может быть пред-ой для $S_n \Rightarrow G(x)$ -устойчива

③ Пуассон - не и ~~не~~ реал. сумм. ~~сумм.~~

Опред-ия связ-ности между ними

Опр. $\{X_1, X_2, \dots\}$ - н.с.в.; N - целочисл. неотрицат. величина, $N, X_1, X_2, \dots$ - н.з. и опр на одном $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Тогда ~~сумм~~ сумм $S_N = \sum_{i=1}^N X_i = X_1(\omega) + \dots + X_N(\omega)(\omega) (\sum_{i=1}^{\infty} X_i = 0)$

Опр $N \sim \Pi(\lambda)$, то S_N - пуассон. сумм. ~~сумм.~~ ~~сумм.~~ (имеет обобщ. пуассон-ое распр)

$$f_{S_N}(t) = f_N(t) = \varphi_N(f(t)) = e^{\lambda(f(t)-1)}$$

Утв $ES_N = \lambda EX_i$ $DS_N = \lambda DX_i + \lambda (EX_i)^2 = \lambda EX_i^2$

Утв Пуассон сумм имеет безгр-но длинное распр.

Опр Если $M \sim \text{Geom}(p)$, то S_N - реал. сумм. (имеет реал. распр)

$$P(M=n) = p(1-p)^n, \quad n=0, 1, \dots$$

$$EM = \frac{1-p}{p}, \quad DM = \frac{1-p}{p^2}$$

связ-ность пуассон и реал. с. сумм

Лемма 1 $\{M\}$ - целочисл. обобщ. неотр. пуассон. сумм. вел. $\Rightarrow S_M$ абс-ца пуассон-ой сумм. вел.

Лемма 2 $\{M \sim \text{Geom}(p)\} \Rightarrow M$ - обобщ. пуасс. с. вел.

теор-ма $\{S_M$ - реал. сумм. (M ~ Geom(p)) тогда

$S_M \stackrel{d}{=} S_N$ - пуасс. сумм. вел. Привед. $X_1 + X_2 + \dots + X_M \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots + Y_N, N \sim \Pi(\log 1/p)$

$Y_i \stackrel{d}{=} X_1 + \dots + X_L$, где L - имеет геометрич. распр

$$(P(L=k)) = \frac{1}{\log 1/p} \frac{(1-p)^k}{k} \quad a > 0$$

Утв $\{S_N$ - пуасс. с. сумм., $S_N = X_1 + \dots + X_N, N \sim \Pi(\lambda)$

$X_i \sim$ хар. ф-ия $f(t), X_1, X_2, \dots$ - н.с.в. или

$$g(t) = \frac{1 - \exp(-\lambda f(t))}{1 - e^{-\lambda}} \text{ абс. хар. ф-ия } \Rightarrow S_N \stackrel{d}{=} S_M$$

$$S_M = Y_1 + \dots + Y_M \quad M \sim \text{Geom}(e^{-\lambda})$$

Y_i - н.с.в. с хар. ф. $g(t), M, Y_1, \dots$ - н.з.

① Опре вер-во пр-ва

Это тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω -пр-во или-на исх-ов (непустое)

$\mathcal{A}$ - σ -алгебра подмнож-в: 1) $\Omega \in \mathcal{A}$ 2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
3) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$; $A \in \mathcal{A}$ -событие

P -вер-ая мера $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

1) $P(\Omega) = 1$ 2) $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$ 3) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

② Опре. безгранично делимости мер. Критерий

Опре ф.р. $F(x)$ и соотв-ая ей характ ф-ция $f(t)$ наз-ая безгранично делимой, если для $n \in \mathbb{N} \exists f_n(t)$ -хар. ф.:
: $f(t) = (f_n(t))^n$

Теорема Кинкина Есть случайный $X_{1,1}$

$X_{i,j}$ -нуж в каждой серии и единиц $X_{2,1}, X_{2,2}, \dots, X_{n,1}, \dots, X_{n,mn}$
распр. попри переходе от одной серии к другой распр. может меняться

и $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq j \leq mn} P(|X_{n,j}| > \frac{\epsilon}{n}) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$ -сл-ие равна и пред. малости

$S_{n,mn} = X_{n,1} + \dots + X_{n,mn}$ тогда $F(x)$ может быть предельной для распр $S_{n,mn} \xrightarrow{L} F(x)$ -безгран. делима

③ Смес вер-ых распр. Опре. идентифицируемости.

Опре $\forall f \in \mathbb{R}^m, (x, y) \in \mathbb{R} \times Y$, на Y задана σ -алгебра $\mathcal{E}$

$\exists$ при $\forall$ фикс $y \in Y$ $F(x, y)$ -ф-ция распр. при $\forall$ фикс $x \in \mathbb{R}$: $F(x, y)$ -измер-ма на $(Y, \mathcal{E})$ σ -вер-ая мера на $(Y, \mathcal{E})$. Тогда $H(x) = \int_Y F(x, y) d\sigma(y)$ -смесь F и σ

$F(x, y)$ -смениваемое, $\sigma(y)$ -смениваемое

Опре $\exists F(x, y)$ удовл-етв. опре смеси. $\exists$ q -сим-б-оси-вы на $(Y, \mathcal{E})$

$M_q = \{MQ(x) : Q \in q\}$ - ~~с~~сем-во смедей

сем-во M_q наз-ся идентифицируемым, если
из равенства

$$EF(x, Q_1) = EF(x, Q_2) \quad \forall x \in R$$

при условии, что $Q_1, Q_2 \in q \Rightarrow Q_1 \stackrel{d}{=} Q_2$

① Матем. ожидание центра сущ. величины

1) Матем.-ое ожидание:

а) $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$ - абс.-но непрерыв

б) $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(\xi = x_i)$ - дискр. сущ.

мат. ожидание линейно, единственно и не всегда

2) медиана

квантиль распр. $F_{\xi}(x)$ порядка $q \in (0; 1)$

это такая точка x_q

$P(\xi < x_q) \leq q$

$P(\xi \leq x_q) \geq q$

$F_{\xi}(x_q) = q$ - для абс. непрерыв.

$x_{1/2}$ - медиана - всегда $\exists$, но не всегда! (единств.)

3) мода - наиболее ожидаемое знач. сл. вел.

$\xi: x_1, x_2, \dots$ б) $\text{mod } \xi = x_k: P(\xi = x_k) \geq P(\xi = x_i) \forall i$

единств. моды не гарантир.

а) $\text{mod } \xi: f(\text{mod } \xi) \geq f(x) \forall x$ - т.е. точка, где

f -ия достиг макс

② Дифференциальная энтропия, св-ва непрерыв. распред.

Опре $H(x) = -E \log p(x)$ (где x - абс. непрерыв. сл. величина,

$p(x)$ - плотность x) - наз-ся дифференциальной энтропией абс. непрерыв. сл. вел. x

Пример 1) $X \sim R[-a; a]$ имеет равномерное распр. на $[-a; a]$

Тогда $H(x) \geq H(y)$, y - сл. вел. на $(P(y) < a) = 1$

т.е. равномерное распр. на конечн. отрезке имеет макс H по сравнению с остальными распр. на этом же отрезке.

2) $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$ - показ. распр.

Тогда $H(x) \geq H(y)$, y - сл. величина: $(P(y \geq 0) = 1, E y = 1/\lambda)$,

т.е. имеет макс H среди всех распр. на полуоси $[0; +\infty)$

с матем. ожиданием $1/\lambda$

3) $X \sim N(a, \delta^2)$ - норм. распр.

Тогда $M(x) \geq M(y)$: y - слут. вел-на

$$E y = a, D y = \delta^2$$

имеет тах M среди всех распр на R с фикс $E y$ и $D y$

③ Дважды стохастический процесс

$\lambda(t)$ - слут. процесс:

1) $\lambda(0) = 0$ п.в.

2) $P(\lambda(t) < \infty) = 1 \quad \forall t \geq 0$

3) траектория $\lambda(t)$ неубыв и неогр. сверху

$N_1(t)$ - стандартн пуасс. процесс

$N_1(t)$ и $\lambda(t)$ - н.з

Опр $N(t) = N_1(\lambda(t))$ - суперпозиция N_1 и λ - наз-ся
дважды стохастическим процессом или
процессом Кокса

$\lambda(t)$ - управляющий процесс

$$E N(t) = E N_1(\lambda(t)) = E(E N_1(\lambda(t)) | \lambda(t)) = E \lambda(t)$$

$$D N(t) = E \lambda(t) + D \lambda(t)$$

если $\lambda(t)$ допуск представ $\lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$,
то $\lambda(\tau)$ - процесс с неогр. интегр. приращу)

$\lambda(\tau)$ - мгновенная стохастич. интенсивность
процесса Кокса

$\lambda(t)$ - накопленная стохастич. интенсивность

4
 1) Средне и св-ва ковариации и корреляции.

ξ, η - случ. вел., определ. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

ковариация:
$$\text{cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = E\xi\eta - E\xi E\eta$$

- 1) cov - линейна по своим аргументам
- 2) инвариантна относительно сдвига на const
- 3) cov симметрична: $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$
- 4) если ξ и η - н/з, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$

обратное не верно

Это качество корр-ции зависит (не показ на сколько, только как)

корреляция:
$$\text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$

1) если 1 из величин = const,

то $\text{corr}(\xi, \eta) = 0$

2) $|\text{corr}(\xi, \eta)| = 0 \Rightarrow \xi, \eta$ - некоррелированы
 если η, ξ - н/з, то $\text{corr} = 0$

3) $|\text{corr}(\xi, \eta)| \leq 1 \quad \forall \xi, \eta$

4) $|\text{corr}(\xi, \eta)| < 1 \Leftrightarrow \exists a, b = \text{const} \in \mathbb{R}: \eta = a\xi + b$

2) Сред пуассон. процессы

Опр семейство случ. величин $x(t, \omega), x \in T$,

опр. на одном вер-ом пр-ве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,

TC R наз-ся случ. процессом

$x(t, \omega) = x(t)$ для кратн-ти

Опр случ процесс $x(t)$ наз-ся процессом с н/з приращ^{ия},
 если $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \quad t_i \in T \quad i = \overline{1, n}$, сл. вел-ти $x(t_0), x(t_1) - x(t_0), \dots, x(t_n) - x(t_{n-1})$ н/з

Опр случ процесс $x(t)$ наз-ся однородным, если $\forall t, t+h \in T$,
 $\xi, \xi+h \in T$ случ. величин $x(t+h) - x(t)$ и $x(\xi+h) - x(\xi)$ одинаково распр.

Опред. Пусть процесс $X(t)$ наз-ся ~~пуассоновым~~ пуассоновым с интенсивностью $\lambda > 0$, если

- 1) $X(t)$ - процесс с н/з приращен.
- 2) ~~$X(t)$~~ $X(t)$ - однородн процесс
- 3) $X(0) = 0$ почти наверное
- 4) при $h \rightarrow 0 + \exists \lambda > 0$:

$$P(X(h) = 0) = 1 - h \cdot \lambda + o(h)$$

$$P(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$$

$$P(X(h) \geq 2) = o(h)$$

$$P(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sim \pi(\lambda t)$$

$$E X(t) = D(X(t)) = \lambda t$$

③ Опред. обобщ. процесса Котса

$\lambda(t)$ - сущ. процесс

1) $\lambda(0) = 0$ п. в.

2) $P(\lambda(t) < \infty) = 1 \quad \forall t \geq 0$

3) траект-ия $\lambda(t)$ непрерывна и не убывает

Опред. $X_1, X_2, \dots$ - Котсы $N(t)$ - процесс Котса

$N(t), X_1, \dots$ - н/з при $\forall t \geq 0$

$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} x_j$ - обобщ. процесс Котса ($\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 0$)

если $\lambda(t) = \lambda t \Rightarrow S(t)$ - обобщ. пуасс. процесс.

Отр Вер-ая модель - матем. модель реального явления, содержа-го элем-тов случайности (принципиально неустраимый недостаток)

Числовая адекватность модели:

- 1) наличие случайности (любви или саги
либо откуда-то пришла)
- 2) воспроизводимость (мы считаем,
что этот же эксперимент мы можем
воспр-ти в других и тех же усл-ях
(макроскоп) много раз)
- 3) постоянство частот $\underline{n(A)}$
 n -общее число эксперим. $n \rightarrow \infty$ P
 $n(A)$ - число эксп., в к-ой наблюд. событие A
 $P = \text{const} \in [0, 1]$

② Сходим слут. вед.

$\xi_1, \xi_2, \dots$ — выпуст. вимот., отвл. на сдвиги $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ для 1-3

- 1) сход-ть ~~то~~ почти всюду /с вер-ю 1/
почти наверное

$$P(W: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(W) = \xi(W)) = 1 \quad \xi_n \xrightarrow{n.b.} \xi$$

- 2) Сход-ть по вер-ти

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi; \forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(W: |\xi_n(W) - \xi(W)| > \varepsilon) = 0$$

- 3) след-ть в средн. порядке $z > 0$:

$$\xi_n \xrightarrow{r} \xi: \lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi_n - \xi|^r = 0$$

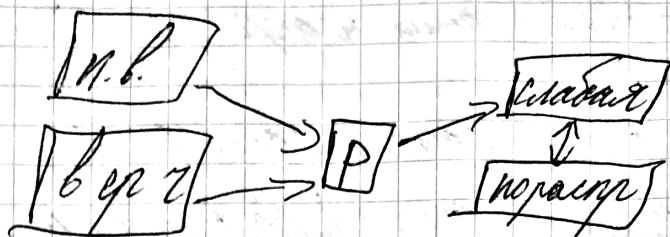
- 4) слабая связь: НЧ-сигнал и межд.

$$E \varphi(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E \varphi(\xi) \quad \xi_n \xrightarrow{w} \xi \quad \int \varphi(x) F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \varphi(x) F(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi(x) dF(x)$$

5) сход-ть по расстр

F_n - ф.р. ξ_n ; $F_n(x) \rightarrow F(x)$ в точке непрерывности $F(x)$



$$\xi_n \xrightarrow{\text{порасстр.}} \xi$$

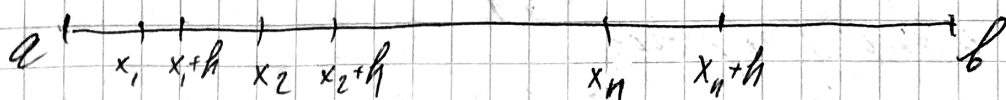
③ информация св-ва пуасс. проц.

1) время ожид между скачками пуассон-го процесса с параметром λ

2) теорема Условие совпадения расстр.

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ такие, что $X(b) - X(a) = n$,
 n - число скачков на $[a, b]$ совпад с расстр.
 вариационный ряд постр. по выборке из
 равномерн расстр на $[a, b]$

$(R \subset [a, b])$; $x_1, \dots, x_n \rightarrow x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ - упор по возрастанию
 $h > 0$ такой, чтобы отрезки не пересекались.



$$P(X_{(i)} \in [x_i, x_i + h] \mid i = 1, \dots, n) \approx h^n f(x_1, \dots, x_n) + o(h^n)$$

$$n! (F(x_1 + h) - F(x_1)) \cdot (F(x_2 + h) - F(x_2)) \cdot \dots \cdot (F(x_n + h) - F(x_n)) \Rightarrow h \rightarrow 0$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! f(x_1) \dots f(x_n), & x_1 < \dots < x_n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

6

① Пред вер-го пр-ва-это такая тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω - пр-во элементарных исходов

$\mathcal{A}$ - σ -алгебра подмножеств: 1) $\Omega \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ 3) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ - события на Ω

P - вер-ая мера $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

1) $P(\Omega) = 1$ 2) $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$ 3) $A_1, \dots \in \mathcal{A}; A_i \cap A_j = \emptyset$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

② Закон больших чисел. Оценка сходимости с помощью ЦПТ

Теор (ЗБЧ Коши)

$\xi_1, \xi_2, \dots$ - н.с.в., с.г. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$E \xi_i = a < \infty$ Тогда $\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \xrightarrow[n.б.]{*} a$

Теор (ЦПТ)

$\xi_1, \xi_2, \dots$ - н.с.в., с.г. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $E \xi_i = a$, $D \xi_i = \sigma^2 < \infty, \sigma^2 > 0$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma \sqrt{n}} < x\right) \Rightarrow \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Оценка:

если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\sigma \sqrt{n}} = c$ и $c \neq 0 < \infty$, то $z(n)$ - с.г. с.с.г.

$$z_n = \left| \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma \sqrt{n}} \right|$$

На основ ЦПТ предп-им, что $z(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n > 0$

$$\begin{aligned} x > 0: P(\sqrt{n} z_n < x) &= P\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma \sqrt{n}} \right| < x\right) = \\ &= P\left(-\frac{x}{\sigma} < \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma \sqrt{n}} < \frac{x}{\sigma}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ЦПТ}} \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{\sigma}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1 \neq 0 < \infty \Rightarrow z(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \text{с.г. с.с.г.} \end{aligned}$$

3) Сущ. суммы и их прост-ие св-ва

N - целочисл. неотр. сумм. вел.

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ - н.с.в., отн. на (Ω, A, P)

$N, x_1, \dots$ - независимы отн. на (Ω, A, P)

Сущ. суммы назыв. $S_N \stackrel{N(\omega)}{=} x_i(\omega)$

$F(x)$ - ф-ия распр. ~~для~~ x_i ; $p(x)$ - плотн.

x_i ; $f(x)$ - характ. ф-ия x_i ; $f(t) = E e^{itx}$

$$P_n = P(N=n)$$

$\psi(s)$ - производящ. ф-ия N

$$\psi(s) = E S^N(s) \leq 1$$

Теор. $\{S_n\}$ - сумм. вел.

$$1) F_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot F^{*n}(x)$$

$F^{*n}(x)$ - n -кратн. свертка $F(x)$

$F^{*0}(x)$ - ф-ия распр. единичн. скачка в 0

2) Если $P_0 > 0 \Rightarrow F_{S_N}(x)$ не абс. непр., даже если

x_i - абс. непр. $\Rightarrow$

$$P_{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n P^{*n}(x), \text{ где } P^{*n}(x) - n\text{-кратн. свертка } p(x)$$

$$3) f_{S_N}(t) = \psi(f(t))$$

$$4) E S_N = E x_i \cdot E N$$

$$D S_N = D x_i \cdot E N + D N (E x_i)^2$$

7
 ① Определ-ие Энтропии Эксперим.

$E = \{A_1, \dots, A_n\}$, где A_i - события эксперимента E ($i=1, \dots, n$)

$$P_i = P(A_i) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j, i \neq j$$

$Q(E)$ - случайная, $I(A_i)$ - кол-во инфор-ции, т.е. показывает сколько информации с какой вероят-ю мы получим от эксперимента $H(E) = EQ(E)$ - средн. знат эксперимента.

$$\text{Средн. знат } H(E) = EQ(E) = \sum_{i=1}^n I(A_i) P(A_i) = - \sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i \quad (P_i > 0)$$

наз-ся энтропией эксперимента
 (т.е. мера неопределенности эксперимента)

② Теорема переноса

$\{X_{n,j}\} \quad j \geq 1, n=1, 2, \dots$ - кол-ва серий ~~не~~ независимых. В каждой серии рассматр. случайные величины, а $N_n, n=1, 2, \dots$ - положит. целые случайные величины, такие, что $N_n, X_{n,1}, \dots, X_{n,k}$ - независимы $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Опред: } S_{n,k} = X_{n,1} + \dots + X_{n,k} \quad k \in \mathbb{N}$$

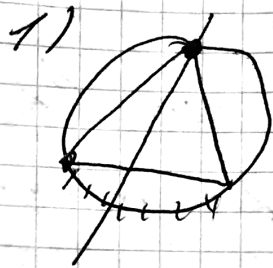
Предположим, что $\exists$ неогр. возрастающая посл. натур. числ $\{m_n\} \quad n \geq 1$ и др-ие ~~распр~~ $H(x)$ и $A(x)$ такие, что $P(S_{n,m_n} < x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(x)$ и

$$P\left(\frac{N_n}{m_n} < x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A(x)$$

Тогда $P(S_{n,m_n} < x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x)$ ($\rightarrow$ слаб. сход-ть), др-ие $F(x)$ соотв. ~~характер~~ φ -ии $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dA(u)$, $t \in \mathbb{R}$, где $h(t)$ - характ φ -ии, соотв φ -ии $H(x)$

$\exists N \sim A(x)$, если $\frac{N_n}{m_n} \xrightarrow{P} 1 \Rightarrow f(t) = h(t)$, т.е. предельная φ -функция совпадает с предельной $H(x)$.

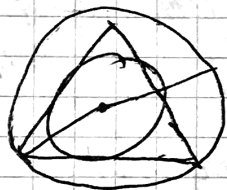
- ③ Парадокс Бернулли
 С какой вер-ю наугад выбранная хорда круга
 длиннее стороны вписанного в него равн. $\triangle$?



зафиксируем начало хорды в одной
 из верш. $\triangle$
 $\alpha = \pi/3$

длина дуги = $\frac{1}{3}$ дуги окр.
 $\Rightarrow R = \frac{1}{3} (\Omega = \alpha)$

2)



вспомогат. $\triangle$ вписан в окр-ть.
 Средине хорды лежит внутри
 вписанной в этот $\triangle$ окр-ти
 $R = \frac{1}{4} \Omega$ - диаметр

3)



Из верш. $\triangle$ диаметр окр-ти,
 перпендикулярная стороне, $R/2$
 $R/2$ от центра окр-ти
 $R = \frac{1}{2} \Omega$ - диаметр

В пост-ке задачи не сказано Ω

(сказано, что выбран наугад)

$\Rightarrow$ вер-ть может быть любой

8 ① Математические модели разброса сл. вел.

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 - \text{дисперсия}$$

св-ва: 1) Если $\xi \in \mathbb{R}$, то!

$$2) D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \text{const}$$

3) может $\neq$

4) неустойчив к выбросам

$$5) D(c\xi) = c^2 D\xi \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} - \text{средне кв. отклонение}$$

$$\bullet \text{отклон от медианы: } E|\xi - \text{med } \xi| = \min_a E|\xi - a|$$

$$\bullet \text{инжирная метрика } E|\xi - E\xi|$$

• медиана абсолют. отклон. от медианы:

$$M.A.D = \text{med } |\xi - \text{med } \xi|$$

одна из наиб. устойчив. моделей разброса

• средн. квадр. размах, интерквартильный размах

$$IQR = X_{3/4} - X_{1/4}, \text{ где } X_{3/4} \text{ и } X_{1/4} - \text{квантили}$$

$$|E\xi - \text{med } \xi| \stackrel{\text{н. Лепанова}}{\leq} E|\xi - \text{med } \xi| \leq E|\xi - E\xi| \stackrel{\text{н. Коши}}{\leq} \sqrt{E(\xi - E\xi)^2} = \sqrt{D\xi}$$

② Основы св-ва энтропии

$$H(E) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i - \text{энтропия эксперимента}$$

E (мера неопредел-ти этого эксперимента)

$$H(E) = E Q(E), Q(E): I(A_1), \dots, I(A_n) - \text{кол-во информации}$$

$A_1, \dots, A_n$ - события в экс-те р,

$$\text{св-ва: } 1) H(E) \geq 0, H(E) = 0 \Leftrightarrow \exists j \in \{1, n\}: p_j = 1$$

и $p_i = 0 \quad i \neq j, i \in \{1, n\}$ т.е. в полностью детерм.

$$\text{экс-те } 2) [E_0 = \{A_1, \dots, A_n\} \quad p_i \neq P(A_i) = \frac{1}{n}, i = 1, n$$

$$[E_1 = \{A_1', \dots, A_n'\} \Rightarrow \text{тогда } H(E_0) \geq H(E_1)$$

3) $E = \{A_1, \dots, A_n\}$, E_1 - элемент, выходящий из E
объединением каких-то других исходов A_i и A_j

$A' = A_i \cup A_j$; $P(A') = P(A_i) + P(A_j)$; $E_2 = \{A_i, A_j\}$ -
только из двух исходов $P(A_i) = \frac{P_i}{P_i + P_j}$

$$H(E) = H(E_1) + (P_i + P_j) H(E_2) \quad P(A_j) = \frac{P_j}{P_i + P_j}$$

4) $H(E)$ не зависит от самих исходов, а зависит
только от их вер-ей P_i , $i = \overline{1, n}$ и вы-я. см. ф-ей от $P_1, \dots, P_n$

5) $H(E)$ - нестр. ф-ия ~~от~~ $P_1, \dots, P_n$

Теор. Фадеева $\exists P_i \geq 0 \quad i = \overline{1, n}$

$\sum_{i=1}^n P_i = 1$ $H(P_1, \dots, P_n)$ - ф-ия от $P_1, \dots, P_n$ и обладает
большим числом интересных св-ий

$$\text{тогда } H(P_1, \dots, P_n) = - \sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i \quad (a > 1)$$

③ Аналог теор. Бюассона для сумм сумм и индик.

$\{X_{p,j}\}$ - семейство полев. сл. вел. $0 < p < 1$,

тогда распредел. функций $j \geq 1 \quad \forall p \quad X_{p,1}, X_{p,2}, \dots$ имеют одно и
то же распредел. $X_{p,j} = \begin{cases} 1, p \\ 0, 1-p \end{cases}$

$\{N_p\}$ - семейство полев. целочисл. сл. вел.

$0 < p < 1 \quad \forall p \quad N_p, X_{p,1}, X_{p,2}, \dots$ независ.

Положим $S_p = \sum_{j=1}^{N_p} X_{p,j}$. $\exists$ все сл. вел. заданы на
одном вероят. пр-ве (Ω, A, P)

Предположим Предположим, что $\exists$ собств. сл. величина N

$$P \cdot N_p \xrightarrow{p \rightarrow 0} N, \text{ тогда } S_p \xrightarrow{p \rightarrow 0} S$$

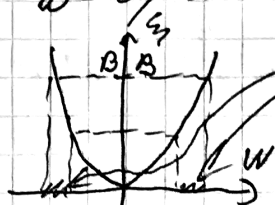
S - дискретн. сл. величина с распредел.

$$P(S=k) = \frac{1}{k!} \cdot \int_0^\infty e^{-z} z^k dP(N \leq z), \quad k = 0, 1, \dots$$

① Определены ли функции

ξ - случайная величина - числовая ф-ия: $\Omega \rightarrow R$, опред. на вероятн. пр-ве (Ω, A, P) , измеримая на $\sigma(R)$

$\forall B \in \mathcal{B}$ - для $\forall$ борелевского мн-ва $\{\xi \in B\} = \{\omega: \xi(\omega) \in B\}$ $\xi^{-1}(B) = \{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in A$
 $\mathcal{B}$ - борелевская σ -алгебра на R



объединение этих отрезков есть полный образ мн-ва B

② ЦПТ Оценка скорости сходимости. (Теор. ЦПТ)

$\xi_1, \xi_2, \dots$ - независимые $E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2 < \infty, \sigma^2 > 0$

Тогда $P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \Rightarrow \Phi(x)$, где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Нер-во Бернулли - Эшмана $\mu^3 = E|\xi_i - a|^3 < \infty$

$\sup_{x \in R} \left| P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_0 \mu^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}, 0.4 < C_0 < 0.5$

События ЦПТ: $\xi_1, \xi_2, \dots$ - независимые $E\xi_i = a_i, \sigma_i^2 = D\xi_i$

$F_i(x)$ - ф.р. ξ_i $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ $B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$

$F_n(x) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - A_n}{B_n} < x\right)$

Усл. Линдберга: (*) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}$

$\forall \varepsilon > 0 \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|\bar{x} - a_i| > \varepsilon B_n} |\bar{x} - a_i|^2 dF_i(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Теор. Линдберга - Феллера

$\xi_1, \xi_2, \dots$ - независимые, $a_i = E\xi_i, \sigma_i^2 = D\xi_i, F_i(x)$ - ф.р. ξ_i

выполнено (*) $\Rightarrow$ выполнено $F_n(x) \Rightarrow \Phi(x)$
 условие равномерности предельной малости:

(**) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq i \leq n} P(|\xi_i - a_i| > \varepsilon B_n) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Обратно: если выполняются и нормальный закон и выполнено (**) $\Rightarrow$ выполнено (*)

Теор. Ляпунова: $\exists M_i^3 = E|\xi_i - a_i|^3 < \infty$

$M_n^3 = \sum_{i=1}^n M_i^3$; $\frac{M_n^3}{B_n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow F_n(x) \Rightarrow \Phi(x)$

$\xi_1, \dots, \xi_n$ - независимые $E\xi_i = a$; $P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = \gamma = P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |\bar{x} - a| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \approx$
 $\approx \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = \gamma \oplus$

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1+\delta}{2}, \text{ где } \frac{1+\delta}{2} - \text{квантиль в стандарт. зак.} \\ \sup_{x \in R} |F_n(x) - \Phi(x)| < \frac{C_0 M^3}{\sqrt{n} \delta^3} = L_{n,3} \end{cases}$$

внутри-ва Б-З

$$\Rightarrow 2 \Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\delta}\right) - 1 - 2 L_{n,3} = \varepsilon - \frac{\delta}{\sqrt{n}} \frac{1+\delta}{2} + L_{3,n}$$

если $\frac{1+\delta}{2} + L_{3,n} \geq 1$, то точности не будет. Иначе

$$L_{n,3} \geq \frac{0.4}{\sqrt{n}}, \text{ если } n = \frac{0.64}{(1-\delta)^2} - \text{точности доверит интервал}$$

③ Пуассон и геом случайные суммы. Свр. связ.

Свр $\{X_1, X_2, \dots\}$ - н.с.в.; N - целочисл. неотр. сл. вел.; $N, X_1, X_2, \dots$ - н.з. и свр на одном $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Пуасс. сл. сумма $S_N = \sum_{i=1}^N X_i = X_1(\omega) + \dots + X_{N(\omega)}(\omega)$
 $(\sum_{i=1}^0 = 0)$ Свр $N \sim \Pi(\lambda)$, то S_N - пуасс.-ая сл. вел.

(имеет обобщ. пуасс. распр)

$$f_{S_N}(t) = f_N(t) = \Psi_N(f(t)) = e^{\lambda(f(t) - 1)}$$

Чтб Пуасс. сумма имеет безгранич. геом. распр

$$\text{Чтб } ES_N^2 = \lambda EX_i^2; DS_N = \lambda DX_i + \lambda (EX_i)^2 = \lambda EX_i^2$$

Свр если $M \sim \text{Геом}(p)$, то S_N - геом. сл. сумма
 (имеет геом. распр)

① Ф-ия распр слуг. вел.

$$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi \in (-\infty; x]); \quad F_{\xi}(x) \text{ определена на } (\Omega, \mathcal{A}, P)$$

св-ва

1) $0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $F_{\xi}(x)$ неуб-на слева

3) $F_{\xi}(x)$ монот не убыв

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$

Важно: 1) ~~абсолютно~~ абсолютно -
- непрерывна, если $\exists$ почти всюду!
 $f_{\xi}(x) \geq 0$ - плотность (измерима)

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) dx \quad (\text{плотность может быть кусочно-непр-на})$$

2) $F_{\xi}(x)$ - дискр-на, если она кусочно пост-на имеет не более, чем счетно число точек роста $P(\xi = x_i) = p_i$, тогда $F_{\xi}(x) = \sum_{i: x_i \leq x} p_i$

3) сингулярное распр: непрерывное, мера точек роста = 0

② Теор. Куассона Схема серий мн-во слуг вел вида:

$$X_{1,1}$$

$$X_{2,1}, \dots, X_{2,2}$$

$$\dots$$

$$X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$$

$X_{i,j}$ - независ в каждой серии и одинаково распр, но при переходе от 1 серии к другой распр. может меняться

Теор. Куассона

$$X_{1,1}$$

$$X_{2,1}, \dots, X_{2,2}$$

$$\dots$$

$$X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$$

$X_{i,1}, \dots, X_{i,i}$ - независ $\forall i$

$$X_{i,j} \sim \begin{cases} 1, & p_i \\ 0, & 1-p_i \end{cases}$$

$\exists$ при $n \rightarrow \infty \lambda \rightarrow \forall k = 0, 1, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) =$$

$$\exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$$

③ Следи вер-на рамер, отур, ~~шар~~ ~~интегр.~~

Отур $\forall y \in R^m, (x, y) \in R \times Y$, на Y задана δ -алл ε

$\exists$ при $\forall$ фикс $y \in Y$ $F(x, y)$ - ф-ия рамер, при $\forall$ фикс $x \in R$: $F(x, y)$ - измерима на $(Y, \mathcal{E})$. тогда $H(x) = \int F(x, y) dG(y)$ -

$F(x, y)$ - измеримая

Y - множество $F \in \mathcal{B}$

$G(y)$ - измеримая

Отур $\exists F(x, y)$ удовл условиям отур следи $\exists$ f -семейство слур выполн на $(Y, \mathcal{E})$

$M_q = \{H_Q(x) : Q \in \mathcal{q}\}$ - семейство слей

Семейство M_q наз-ся идентифицируемым из рав-ва

$$E F(x, Q_1) = E F(x, Q_2) \quad \forall x \in R$$

при усл, что $Q_1, Q_2 \in \mathcal{q} \Rightarrow Q_1 \stackrel{d}{=} Q_2$

① Случ. $\mathcal{A}$ независ. событий и независ. случ. вел.

Случ. события $A, B \in \mathcal{A}$ независимы, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Случ. события $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ независимы в совокупности, если $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad \forall k = 2, \dots, n$

$$P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) \quad \text{Совмест. независ.}$$

Случ. вел. ξ и η - независ., если $\forall A, B \in \mathcal{B}$ -

$$P(\xi \in A; \eta \in B) = P(\xi \in A)P(\eta \in B)$$

② Безграничность величины роста теор. Липшица

Случ. ф-ия роста $F(x)$ и соответ. ей характ.

ф-ия $f(t)$ наз. безгранично делимой,

если для $\forall n \in \mathbb{N} : \exists f_n(t)$ - характ.

ф-ия некот. случ. вел.-нос: $f(t) = (f_n(t))^n$

Теор. Липшица

$x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n}$ - схема серий ($x_{i,j}$ - н/з случ. вел., в каждой серии n сумм роста.)

$$\text{и } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq j \leq m_n} P(|x_{n,j}| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

- усл.-ие равномерн. предельн. малости

$$S_{n,m_n} = x_{n,1} + \dots + x_{n,m_n} \Rightarrow \text{тогда } F(x) \text{ может}$$

быть предельной для роста $S_{n,m_n} \Leftrightarrow$

$F(x)$ - безгранично делима

③ ЦПТ для свобод. процесса Кокса

$\lambda(t) > 0$ - неогр. возр. ф-ия при $t \rightarrow \infty$

x_1, x_2 - независ. о.р. сл. вел. (персб)

$$\mathbb{E} x_i = 0, \mathbb{D} x_i = \sigma^2, 0 < \sigma^2 < \infty$$

$$\lambda(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} \infty$$

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j - \text{обобщ процесс кокса}$$

$$\frac{S(t)}{\sqrt{d(t)}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} z \Leftrightarrow \text{можно } \exists \text{ неогр. и. в.в.}$$

и тогда, тогда: 1) $P(z < x) = \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dP(u < y)$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$2) - \frac{\lambda(t)}{d(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} u - \text{гип-случ-мис } \lambda(t)$$

следствие в условиях теоремы

$$P\left(\frac{S(t)}{\sqrt{d(t)}} < x\right) \rightarrow \Phi(x) \Leftrightarrow \frac{\lambda(t)}{d(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 1$$